

# 基于稀疏贝叶斯学习的图像重建方法

方红<sup>1,2)</sup> 王年<sup>2)</sup> 章权兵<sup>2)</sup> 韦穗<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup>(上海第二工业大学理学院,上海 201209)

<sup>2)</sup>(安徽大学计算智能与信号处理教育部重点实验室,合肥 230039)

**摘要** 结合稀疏贝叶斯学习(SBL)和可压缩传感理论(CS),给出一种在噪声测量条件下重建可压缩图像的方法。该方法将CS理论中图像重建过程看作一个线性回归问题,而待重建的图像是该回归模型中的未知权值参数;利用SBL方法对权值赋予确定的先验条件概率分布用以限制模型的复杂度,并引入超参数;最大化超参数的边缘对数似然函数求得权值参数的最优估计即待重建图像。该方法同时还给出了权值估计的后验概率密度和误差条,从而获得权值最优值的不确定性测量。实验结果表明,SBL方法可以获得精确重建,并且在相同相对重建误差的条件下,比基追踪(BP)方法需要更少的重建时间,比正交匹配追踪(OMP)需要更少的测量次数。

**关键词** 稀疏贝叶斯 可压缩传感 超参数 稀疏性

中图法分类号: TN911.73 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2009)06-1064-06

## Approach of Image Reconstruction Based on Sparse Bayesian Learning

FANG Hong<sup>1,2)</sup>, WANG Nian<sup>2)</sup>, ZHANG Quan-bing<sup>2)</sup>, WEI Sui<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup>(College of Science, Shanghai Second Polytechnic University, Shanghai 201209)

<sup>2)</sup>(Key Laboratory of Intelligent Computing and Signal Processing, Anhui University, Hefei 230039)

**Abstract** Combining sparse bayesian learning (SBL) with compressed sensing (CS), a new method of reconstruction for compressed images with contaminated measurements is presented. This method regards the process of image reconstruction as a linear regression model and the image to be reconstructed as the unknown weights of the regression model. By sparse bayesian learning, the weights are endowed with certain prior condition probability density function, which limits the complexity of the model and simultaneously introduces the hyper-parameters. With maximizing the marginal likelihood function of hyper-parameters, the optimal weights are acquired, i. e. the reconstructed image. Simultaneously, this method provides the posterior probability density and the error bars of estimated weights, which deduces the uncertainty of reconstruction. Experimental results show that the new method can acquire exact reconstruction and under the same relative error of reconstruction, it is superior to basis pursuit on reconstruction time and orthogonal matching pursuit on the number of measurements.

**Keywords** sparse bayesian learning, compressed sensing, hyper-parameters, sparsity

## 1 引言

CS理论是由Donoho, Candes, Romberg和Tao<sup>[1-2]</sup>从信号稀疏分解和逼近理论进一步发展的

一种新的信号处理理论。该理论的提出者之一, Donoho, 美国科学院院士, 斯坦福大学的统计学家, 在信号处理的众多领域, 如信号稀疏分解、逼近理论、小波变换、图像压缩等都做出巨大贡献<sup>[3-4]</sup>。CS理论的本质内容是可压缩信号(在某个基上具有稀

基金项目:国家自然科学基金项目(60603083, 60473102)

收稿日期:2007-05-11; 改回日期:2007-12-27

第一作者简介:方红(1981~),女,讲师。2008年7月于安徽大学计算机科学与技术学院获计算机科学与技术专业博士学位。主要研究方向为计算机视觉与图像处理。E-mail:luckymars@gmail.com

疏描述)的少量随机的线性投影即包含了重构和处理的足够信息,也就是仅仅利用信号可压缩的先验知识和少量的全局的线性测量可以获得精确重建。该理论中,随机编码的鲁棒性关键在于要使随机化测量具有相等的优先等级,这种随机编码与当前的变换编码(例如 Fourier 或 Wavelet)中的系数不同,它同时具有通用性、加密性、鲁棒性和可渐进性、可缩放性、计算的非对称性。同时,这种随机编码过程非常简单,仅需计算非相干投影而不做任何其他的处理。从而,可以把大部分的计算复杂性都放在解码器上。因此,高效、快速的重建(解码)算法是 CS 理论研究的核心内容之一。

目前,CS 理论的重建算法主要包括两类,一类是以基追踪算法 BP(basis pursuit)<sup>[5]</sup>为代表的基于  $l_1$  模的线性优化方法,该方法在较少测量数目的条件下,可以获得精确的重建结果,但它要在所有测量向量的不同组合中寻求最优化的解,因此计算复杂性非常高。另一类是以正交匹配追踪算法 OMP(orthogonal matching pursuit)<sup>[6]</sup>为代表的贪婪算法,该算法通过递归地对已选择原子集合进行正交化从而保证了迭代的最优性,从而大大减少了达到收敛的迭代次数,但是 OMP 通过强制迭代过程停止来保证重建过程中的稀疏性,这使得它较 BP 需要更多的线性测量。

稀疏贝叶斯学习方法 SBL(sparse bayesian learning)是一种基于贝叶斯框架的核函数方法<sup>[7-8]</sup>,它具有和支持向量机 SVM(support vector machine)<sup>[9]</sup>相同的核函数形式,但它在迭代优化的过程中剔除大量的核函数和训练样本获得稀疏模型,这种稀疏性是根据训练数据自动调整,而不同于 SVM 需要由参数来控制;另外,SBL 方法的核函数不受 Mercer 条件的限制,而且还能给出回归和分类结果的后验概率。

本文结合 SBL 方法和 CS 理论,提出一种在噪声测量条件下重建可压缩图像的方法。该方法将 CS 理论中图像重建过程看做一个线性回归问题,利用 SBL 方法对权值赋予先验条件概率分布用以限制模型的复杂度,并引入超参数;最大化超参数的边缘对数似然函数获得权值参数的最优估计即得重建图像。实验结果表明,该方法能获得精确重建,并且在相同重建条件下,比 BP 所需的重建时间少,比 OMP 所需的测量次数少。

## 2 可压缩传感理论

CS 理论的本质是一种非适应性的、非线性的可压缩信号(图像)的重建方法。其主要内容是:在某组基(称为稀疏基)  $\Psi = [\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_d]$  上具有  $m$ -稀疏描述的  $d$  采样的信号  $x \in \mathbf{R}^d$ , 即  $x$  可以表示成  $\Psi$  中  $m$  个向量的线性组合形式:

$$x = \sum_{n=1}^d \omega(n) \psi_n = \sum_{l=1}^m \omega(n_l) \psi_{n_l} \quad (1)$$

式中,  $n_l$  为  $m$  个向量的索引,可以通过它在另一组非相干的基(称为测量基)  $\Phi = (\phi_1^T, \phi_2^T, \dots, \phi_M^T)$  上的  $M$  ( $m \leq M \ll d$ ) 个线性投影(或测量)  $y(i) = \langle x, \phi_i^T \rangle, i \in \{1, 2, \dots, M\}$  获得精确重建。利用矩阵的形式,可以记为

$$y = \Phi \Psi^T x = \Phi \omega \quad (2)$$

式中,  $\omega$  为  $m$ -稀疏的向量。称  $M$  维列向量  $y$  为测量向量,  $M \times d$  维矩阵  $\Phi$  为测量矩阵。为了后面的表述方便,定义  $\Phi$  的列向量为  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_d$ 。该理论成立的一个必要条件就是要求稀疏基和测量基之间满足非相干性,即要求这两个基之间不能相互稀疏描述。由于任何一个固定的基都与由某种随机分布所生成的随机基非相干,因此在 CS 理论中测量基(测量矩阵)基本上都采用由一定随机分布,比如高斯分布或贝努里分布所生成的随机基。本文采用的是由高斯分布生成的随机测量矩阵。

## 3 基于稀疏贝叶斯学习的图像重建

本文考虑的是噪声测量条件下的图像重建问题,这里假设噪声  $n \sim N(0, \sigma^2 I_M)$ , 其中  $\sigma^2$  表示未知的噪声方差。这时有

$$y = \Phi \omega + n \quad (3)$$

### 3.1 估稀疏贝叶斯学习

首先,在给定 CS 测量  $y$  的条件下,由式(3),权值  $\omega$  和噪声方差  $\sigma^2$  的似然函数可写为

$$p(y | \omega, \sigma^2) = (2\pi \sigma^2)^{-\frac{M}{2}} \exp \left\{ -\frac{\|y - \Phi \omega\|_2^2}{2\sigma^2} \right\} \quad (4)$$

一般的解法是通过最大似然法求出最优的  $\omega$ , 使经验风险最小化,但是这样的方法经常会导致过学习的现象。为避免这种情况,稀疏贝叶斯学习方法对权值  $\omega$  赋予先验条件概率分布:

$$p(\boldsymbol{\omega} | \boldsymbol{\alpha}) = \prod_{i=1}^M N(\omega_i | 0, \alpha_i^{-1}) \quad (5)$$

这里  $N(\omega_i | 0, \alpha_i^{-1})$  是均值为零, 方差为  $\alpha_i^{-1}$  的高斯密度函数。并同时给  $\boldsymbol{\alpha}$  赋先验:

$$p(\boldsymbol{\alpha} | a, b) = \prod_{i=1}^M \Gamma(\alpha_i | a, b) \quad (6)$$

式中,  $a, b$  为  $\Gamma$  分布的两个参数, 并且称  $\boldsymbol{\alpha}, \sigma^2$  为超参数, 可以看出对每一个权值分量  $\omega_i$  用一个超参数  $\alpha_i$  来控制。综合式(5)和式(6)获得  $\boldsymbol{\omega}$  的最终先验为

$$p(\boldsymbol{\omega} | a, b) = \prod_{i=1}^M \int_0^{\infty} N(\omega_i | 0, \alpha_i^{-1}) \Gamma(\alpha_i | a, b) d\alpha_i \quad (7)$$

Bernardo 和 Smith<sup>[10]</sup> 证明了式(7)给出的实际上是一个  $t$  分布。适当的选择参数  $a, b$ , 则  $t$  分布在  $\omega_i = 0$  点附近达到峰值, 因此由式(7)给出的先验分布保证了权值大部分的分量为零, 也就是保证了重建过程的稀疏性。

由贝叶斯法则, 在  $\mathbf{y}, \boldsymbol{\alpha}$  和  $\sigma^2$  已知的条件下, 权值  $\boldsymbol{\omega}$  服从多元高斯分布, 即

$$p(\boldsymbol{\omega} | \mathbf{y}, \boldsymbol{\alpha}, \sigma^2) \propto N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) \quad (8)$$

式中,  $\boldsymbol{\mu} = \sigma^{-2} \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{y}$ ,  $\boldsymbol{\Sigma} = (\mathbf{A} + \sigma^{-2} \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi})^{-1}$ , 这里  $\mathbf{A} = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_M)$ 。这时超参数  $\boldsymbol{\alpha}$  和  $\sigma^2$  的对数边缘似然函数  $L(\boldsymbol{\alpha}, \sigma^2)$  可写为

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\alpha}, \sigma^2) &= \log p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\alpha}, \sigma^2) \\ &= \log \int p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\omega}, \sigma^2) p(\boldsymbol{\omega} | \boldsymbol{\alpha}) d\boldsymbol{\omega} \\ &= \frac{1}{2} [K \log 2\pi + \log |\mathbf{C}| + \mathbf{y}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{y}] \quad (9) \end{aligned}$$

这里  $\mathbf{C} = \sigma^2 \mathbf{I} + \boldsymbol{\Phi} \mathbf{A}^{-1} \boldsymbol{\Phi}^T$ 。对式(9)求(II)型最大似然, 数值求解得最优值  $\boldsymbol{\alpha}_{MP}$  及  $\sigma_{MP}^2$ , 由式(8)可以获得  $\boldsymbol{\omega}$  估计的后验概率密度函数, 取后验估计的均值作为权值  $\boldsymbol{\omega}$  的一个点估计, 即  $\hat{\boldsymbol{\omega}} = \sigma^{-2} (\mathbf{A} + \sigma^{-2} \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi})^{-1} \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{y}$ 。

最后由  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\omega}$ , 可以获得估计的误差条(error bars):

$$E(\mathbf{x}) = E(\boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\Psi} \hat{\boldsymbol{\mu}} \quad (10)$$

$$\text{cov}(\mathbf{x}) = \text{cov}(\boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\Psi} \hat{\boldsymbol{\Sigma}} \boldsymbol{\Psi}^T \quad (11)$$

这里,  $\hat{\boldsymbol{\mu}} = \sigma_{MP}^{-2} \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{y}$ ,  $\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = (\tilde{\mathbf{A}} + \sigma_{MP}^{-2} \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi})^{-1}$ , 这里  $\tilde{\mathbf{A}}$  中的元素由  $\boldsymbol{\alpha}_{MP}$  构成。

### 3.2 快速求解

式(9)的求解显然是个迭代过程, 可以将  $\boldsymbol{\omega}$  看作隐藏变量利用 EM 算法迭代求解, 也可以通过直

接求导进行求解, 但是这两种方法在优化求解过程中都需要多次计算  $M \times M$  维矩阵  $\boldsymbol{\Sigma}$  的逆, 从而使得计算量非常大, 特别是处理大幅图像的时候, 这一问题更加显著。因此, 这里采用文献[11]中给出的一种快速迭代算法。

考虑  $L(\boldsymbol{\alpha}, \sigma^2)$  对于超参数  $\boldsymbol{\alpha}$  的依赖, 将  $\mathbf{C}$  做如下分解:

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \sigma^2 \mathbf{I} + \boldsymbol{\Phi} \mathbf{A}^{-1} \boldsymbol{\Phi} \\ &= \sigma^2 \mathbf{I} + \sum_{m \neq i} \alpha_m^{-1} \boldsymbol{\phi}_m \boldsymbol{\phi}_m^T + \alpha_i^{-1} \boldsymbol{\phi}_i \boldsymbol{\phi}_i^T \\ &= \mathbf{C}_{-i} + \alpha_i^{-1} \boldsymbol{\phi}_i \boldsymbol{\phi}_i^T \quad (12) \end{aligned}$$

式中,  $\mathbf{C}_{-i}$  表示  $\mathbf{C}$  中第  $i$  个向量消除后的矩阵,  $\boldsymbol{\phi}_m$ 、 $\boldsymbol{\phi}_i$  分别表示矩阵  $\boldsymbol{\Phi}$  的第  $m, i$  行向量。由矩阵行列式相等和求逆的性质, 有

$$|\mathbf{C}| = |\mathbf{C}_{-i}| |1 + \alpha_i^{-1} \boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{C}_{-i}^{-1} \boldsymbol{\phi}_i| \quad (13)$$

$$\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}_{-i}^{-1} - \frac{\mathbf{C}_{-i}^{-1} \boldsymbol{\phi}_i \boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{C}_{-i}^{-1}}{\alpha_i + \boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{C}_{-i}^{-1} \boldsymbol{\phi}_i} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\alpha}) &= -\frac{1}{2} \left[ M \log(2\pi) + \log |\mathbf{C}_{-i}| + \mathbf{y}^T \mathbf{C}_{-i}^{-1} \mathbf{y} - \right. \\ &\quad \left. \log \alpha_i + \log(\alpha_i + \boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{C}_{-i}^{-1} \boldsymbol{\phi}_i) - \frac{(\boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{C}_{-i}^{-1} \mathbf{y})^2}{\alpha_i + \boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{C}_{-i}^{-1} \boldsymbol{\phi}_i} \right] \\ &= L(\boldsymbol{\alpha}_{-i}) + \frac{1}{2} \left[ \log \alpha_i - \log(\alpha_i + s_i) + \frac{q_i^2}{\alpha_i + s_i} \right] \\ &= L(\boldsymbol{\alpha}_{-i}) + l(\alpha_i) \quad (15) \end{aligned}$$

这里  $s_i = \boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{C}_{-i}^{-1} \boldsymbol{\phi}_i$ ,  $q_i = \boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{C}_{-i}^{-1} \mathbf{y}$ , 而  $L(\boldsymbol{\alpha}_{-i})$  表示消除第  $i$  个向量后的对数似然函数。通过文献[11]中对  $l(\alpha_i)$  的分析知  $L(\boldsymbol{\alpha})$  在以下两种情况取到唯一的最大值:

$$\text{若 } q_i^2 > s_i \quad \alpha_i = \frac{s_i^2}{q_i^2 - s_i} \quad (16)$$

$$\text{若 } q_i^2 \leq s_i \quad \alpha_i = \infty \quad (17)$$

因此优化求解过程实际上是一个添加或删除基向量并实时更新参数的过程, 不需要进行大矩阵的求逆运算; 同时, 在每一步迭代过程中保证了边缘似然函数的增加, 从而保证了迭代的收敛性。概括如下:

若  $\boldsymbol{\phi}_i$  在当前模型中, 也就是对应  $\alpha_i < \infty$ , 且  $q_i^2 \leq s_i$ , 那么将  $\boldsymbol{\phi}_i$  从模型中删除, 并设定  $\alpha_i = \infty$ 。

若  $\boldsymbol{\phi}_i$  从模型中剔除了, 即  $\alpha_i = \infty$ , 且有  $q_i^2 > s_i$ , 那么增加  $\boldsymbol{\phi}_i$ , 给出对应  $\alpha_i$  的最优估计值。

根据上述的分析, SBL 方法与 BP 方法和 OMP 方法的主要区别在于它在优化求解过程中自动保证

了权值的稀疏性而无需参数进行控制,而 BP 和 OMP 都是在已知稀疏度的条件下,事先强制设定迭代次数来保证稀疏性,从而使得迭代要么需要更多时间,要么需要更多测量。

## 4 实验结果

### 4.1 模拟图像实验

在模拟实验中,以重建一个长度为  $d = 512$  的绝

对稀疏信号  $x$  为例,该信号是通过在其 512 个位置上随机的选择 20 个,即稀疏度  $m = 20$ ,并对这些位置随机的赋值  $\pm 1$  来产生。测量次数  $M$  满足条件  $M \sim O(m \log(d/m))$ ,投影(测量)矩阵  $\Phi \in \mathbf{R}^{M \times d}$ ,且  $\Phi(i,j) = \frac{1}{\sqrt{M}}\phi_{ij}$ ,其中  $\phi_{ij} \sim N(0,1)$ ,为了模拟噪声测量,对测量数据添加了均值为零,方差为  $\sigma^2 = 0.005$  的高斯噪声。图 1 同时给出了 SBL, BP 和 OMP 方法的重建结果比较。

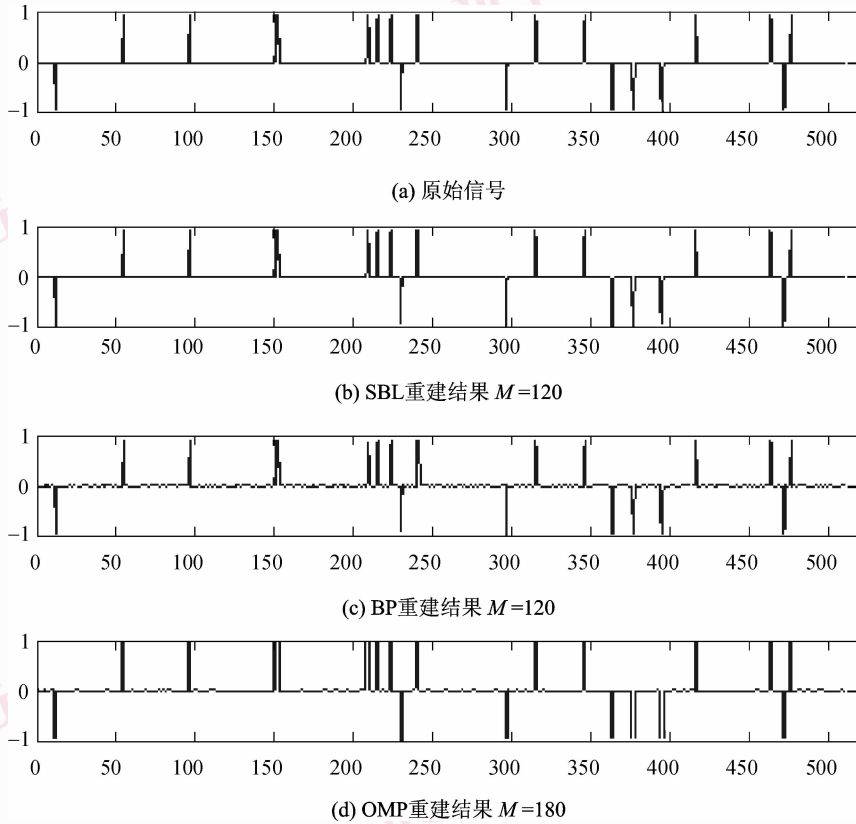


图 1 原始信号和 3 种方法的重建结果

Fig. 1 The original signal and reconstruction results with three method

在这个例子中,可以发现 BP 和 OMP 都不能在噪声条件下获得很好的重建结果,而 SBL 方法受噪声的影响很小。SBL 和 BP 在相同的测量数目下重建,重建的相对误差分别是  $error_{SBL} = 0.0477$  和  $error_{BP} = 0.5799$ ;在重建时间上,BP 需要时间最多,SBL 与 OMP 需要的时间相当,但是 OMP 需要比 BP 和 SBL 多得多的测量数目才能达到相似的重建误差,本例中  $error_{OMP} = 0.4509$ ,而测量次数增加了 60 次。这里需要说明稀疏信号重建对重建算法是一个具有挑战的例子,因为它需要同时精确确定脉冲的位置和振幅。

鉴于重建中测量矩阵的随机性,下面通过多次的实验来比较上述 3 种方法的重建结果。比较的标准仍然是测量次数和相对重建误差之间的关系。对每种方法在不同的测量数目下做了多次实验,比较的结果如图 2 所示。

由图 2 可以看出,3 种方法在一定测量数目的条件下都可以获得精确重建,并且随着测量数目的增加,重建的相对误差逐渐递减即重建具有渐近性,这也是 CS 理论用于图像重建的一个非常吸引人的优点;在相同测量误差的条件下 SBL 方法需要最少的测量次数,BP 方法其次,OMP 方法最多;在重建

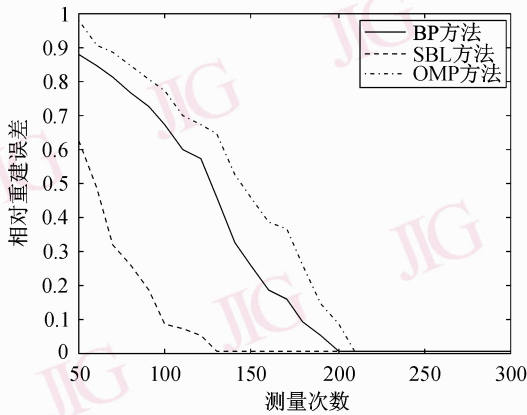


图 2 3 种方法在相同测量次数条件下的重建结果比较

Fig. 2 The comparison of the reconstruction results based on three kinds of methods with the same number of measurement

时间上, SBL 和 OMP 需要重建的时间相当, 而 BP 方法需要的时间最多; 最后由于测量矩阵的随机性使

得一次或多次测量的丢失也不会影响整个重构, 不会出现诸如图像传输中如果丢失了关键帧就会影响整个重构的情况。

#### 4.2 真实图像实验

为了更好地比较 SBL 方法与其他重建方法, 重建文献[12]中随机生成的大小为  $256 \times 256$  的几何图像, 见图 3(a)。该图是一个典型的分段光滑图像, 对原始图像进行 Haar 小波分解, 重建的结果如图 3。

由图 3 可以看出, 对于可压缩图像, SBL 方法在一定测量次数下仍然可以获得精确重建, 而且所需要的测量次数与 BP 方法相当, 重建的速度与 OMP 方法相当。重建的相对误差分别为:  $error_{SBL} = 0.1076$ ,  $error_{BP} = 0.2876$ ,  $error_{OMP} = 0.3360$ 。在文献[12]中通过多尺度的 CS 方法减少了对测量次数的要求, 但是该方法要事先确定小波分解的最粗尺度和最佳尺度, 而这是个很难解决的问题。

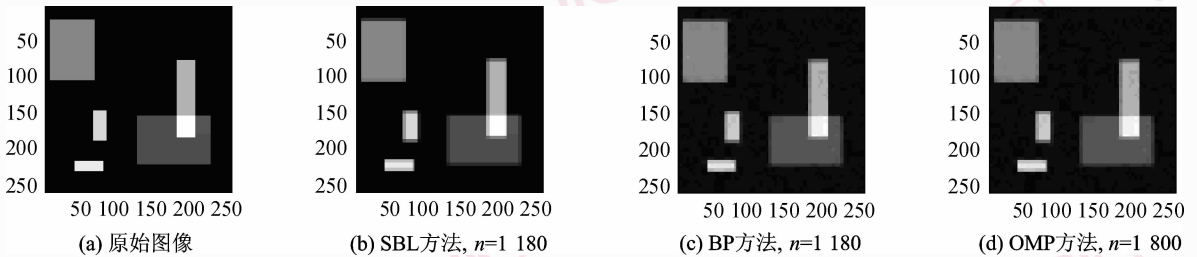


图 3 原始图像和分别利用 SBL, BP 和 OMP 的重建结果

Fig. 3 The original image and the reconstruction results respectively with the method of SBL, BP and OMP

最后, 为了验证 SBL 方法保持重建的稀疏性的能力, 分别重建大小均为  $64 \times 64$ , 稀疏度分别为 385, 424 和 501 的茶杯、汽车和海螺图像 (如图 (4) 所示), 这些图像都来自于计算机视觉图像库 (<http://staff.science.uva.nl/~aloi>)。

利用 SBL 方法的重建结果如图 5 所示:

3 个图像重建的相对误差分别为  $error_{cup} = 0.0118$ ,  $error_{car} = 0.0214$ ,  $error_{whelk} = 0.0217$ , 重建后的稀疏度分别为 417, 445 和 519, 由此可见 SBL 方法很好地保证了重建的稀疏度。

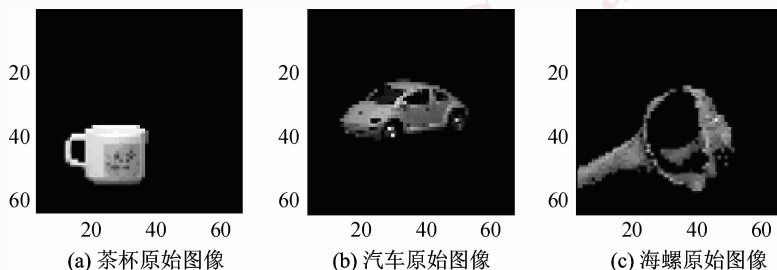


图 4 茶杯、汽车、海螺的原始图像

Fig. 4 The original images of cup, car and whelk

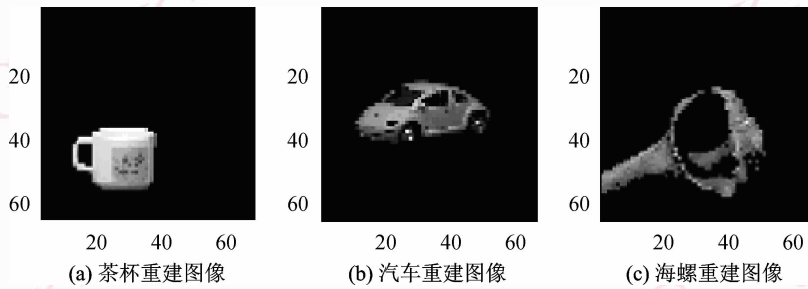


图5 茶杯、汽车、海螺的重建结果

Fig. 5 The reconstruction results of cup, car and whelk

## 5 结 论

本文结合 SBL 方法和 CS 理论,提出了一种在噪声测量条件下重建可压缩图像的方法。该方法将 CS 理论中图像重建过程看作一个线性回归问题,利用 SBL 方法对权值赋予先验条件概率分布用以限制模型的复杂度,并引入超参数;最大化超参数的边缘对数似然函数获得权值参数的最优估计即得重建图像。SBL 方法不仅可以获得权值参数的点估计,还可以给出权值的后验概率分布函数形式和估计的误差条。实验结果表明 SBL 方法可以精确重建,且在重建的时间上优胜于 BP 方法,在测量数目上胜于 OMP 方法。但是还有很多问题有待解决,比如,如何利用权值估计的后验概率分布函数和误差条适应性选择最优的随机投影,以及如何确定最佳测量次数等,这些都是今后要解决的问题。

### 参考文献 (References)

- 1 Donoho D. Compressed sensing[J]. IEEE Transactions Information Theory, 2006, **52**(4):1289-1306.
- 2 Candès E J, Romberg J, Tao T. Signal recovery from incomplete and inaccurate measurements[J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 2005, **59**(8): 1207-1223.
- 3 Donoho D, Huo X. Uncertainty principles and ideal atomic decompositions [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2001, **47**(7):2845-2862.
- 4 Donoho D, Elad M. Maximal sparsity representation via  $l_1$  minimization[J]. Proceedings of the National Academy of Science, 2003, **100**(5):2197-2202.
- 5 Candès E J, Tao T. Decoding by linear programming [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2005, **51**(12):4203-4215.
- 6 Tropp J, Gilbert A. Signal recovery from partial information via orthogonal matching pursuit [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2007, **53**(12): 4566-4666.
- 7 Tipping M. The relevance vector machine [A]. In: Solla S A, Leen T K, Müller K-R. Advances in Neural Information Processing Systems 12[C], Cambridge, MA, USA: MIT Press, 2000: 652-658.
- 8 Figueiredo M. Adaptive sparseness for supervised learning[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2003, **25**(9): 1150-1159.
- 9 Vapnik V N. The Nature of Statistical Learning Theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1995.
- 10 Bernardo J M, Smith A F M. Bayesian Theory[M]. Wiley, 1994.
- 11 Faul A, Tipping M. Analysis of sparse bayesian learning [A]. In: Dietterich T G, Becker S, Ghahramani Z. Advances in Neural Information Processing Systems 14 [C], Cambridge, MA, USA: MIT Press, 2002:383-389.
- 12 Tsaig Y, Donoho D. Extensions of compressed sensing [J]. Signal Processing, 2006, **86**(3): 549-571.